2.8.1 Lineární rovnice s parametrem I

Předpoklady: 2203

Pedagogická poznámka: Úvodní příklad je možné vynechat, tím ušetříte skoro 30 minut času, ale hodina ztratí velkou část svého kouzla. Příklad sice není z matematického hlediska příliš zajímavý (kvadratická závislost by určitě byla zajímavější), ale poměrně věrně kopíruje reálné rozhodování v podobných situacích. I z hlediska úvodní úlohy k parametrickým rovnicím je poměrně vhodný, protože je nutné sestavené výrazy upravovat.
Studenti na něj poměrně dobře reagují a diskutují o reálnosti zadání (zejména plat dělníků jim přijde vysoký).

Př. 1: Stavební podnikatel má se svou firmou vykonat stavební práce v rozsahu 10 000 hodin. Za provedení stavby dostane po odečtení nákladů na materiál 4 000 000. Na stavbě bude pracovat 10 dělníků 8 hodin denně za hodinovou mzdu 150 Kč. Pronájem stavebních strojů, vybavení, zajištění staveniště a další nutné výdaje stojí 20000 denně.
Dělníci mohou pracovat na přesčasech, v tomto případě jim podnikatel musí vyplácet vyšší hodinovou mzdu 250 Kč. Urči, kolik peněz podnikatel vydělá v závislosti na tom, když dělníci budou pracovat 0, 1, 2, 3, 4 hodiny přesčasů denně.

Podnikatelův zisk = 4 000 000 - platby za stroje – mzdy – mzdy na přesčasy.

Jak to udělat, abychom nemuseli počítat příklad pětkrát? Spočteme ho s jednou hodinou přesčasů, ve všech výrazech budeme jedničku nechávat, označíme si ji podtržením a na konci ji pak vyměníme za jiná čísla.
Podtržená jednička = hodina přesčasů denně.

Určíme počet dní stavby n:

$$\text{hodiny k odpracování} = \text{počet dělníků} \cdot (\text{denní pracovní doba} + \text{přesčasy}) \cdot \text{počet dní}$$

$$10\,000 = 10 \cdot (8 + \underline{1}) \cdot n$$

$$n = \frac{10000}{10(8+\underline{1})} = \frac{1000}{(8+\underline{1})}$$

podnikatelův zisk = 4 000 000 - platby za stroje – mzdy – mzdy na přesčasy

$$x = 4000000 - 20000 \cdot n - n \cdot 10 \cdot 8 \cdot 150 - n \cdot 10 \cdot \underline{1} \cdot 250$$

$$x = 4000000 - n\left(20000 + 10 \cdot 8 \cdot 150 + 10 \cdot \underline{1} \cdot 250\right)$$

$$x = 4000000 - n\left(20000 + 12000 + \underline{1} \cdot 2500\right)$$

$$x = 4000000 - n\left(32000 + \underline{1} \cdot 2500\right)$$

Dosadíme za počet dní: $n = \frac{1000}{(8+\underline{1})}$.

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+\underline{1})}\left(32000 + \underline{1} \cdot 2500\right)$$

Víc už výraz upravovat nemůžeme, pokud nechceme ztratit informaci, které číslo znamená počet přesčasových hodin.

------------1h přesčasy
Spočteme zisk podnikatele, když budou dělníci pracovat 1 hodinu přesčasů denně.

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+1)}\left(32000 + 1 \cdot 2500\right) \doteq 167000$$

Pokud budou dělníci pracovat 1 hodinu přesčasů denně, podnikatel dosáhne zisku 167000 Kč.

------------2 h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+2)}\left(32000 + 2 \cdot 2500\right) = 300000$$

Stejně spočítáme i všechny další možnosti:
------------3h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+3)}\left(32000 + 3 \cdot 2500\right) \doteq 409000$$

------------4h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+4)}\left(32000 + 4 \cdot 2500\right) = 500000$$

------------0h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+0)}\left(32000 + 0 \cdot 2500\right) \doteq 0$$

Největšího zisku 500000 dosáhne podnikatel v případě, že dělníci budou pracovat 4 hodiny přesčasů denně.

Nejtěžší bylo spočítat příklad poprvé pro jednu hodinu přesčasů denně. Díky tomu, že jsme jedničku označili a nezapočítali jsme ji do žádného výrazu, jsme pro další možnosti pouze dosazovali do odvozeného vztahu.

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+\underline{1})}\left(32000 + \underline{1} \cdot 2500\right)$$

Abychom lépe zdůraznili, že číslo jedna hraje ve vztahu zvláštní roli, napíšeme místo ní písmeno *p*, které znamená počet přesčasových hodin.

Rovnici $x = 4000000 - \frac{1000}{8+p} \cdot \left(32000 + 2500 \cdot p\right)$ nazýváme rovnice s parametrem.
Rovnice s parametrem je rovnice, která obsahuje písmenko (parametr), za které můžeme dosazovat různá čísla (v našem případě $p = 0, 1, 2, 3, 4$). Rovnici řešíme pouze jednou s parametrem, výsledky získáváme dosazováním konkrétních hodnot za parametr. Řešíme tak více rovnic najednou (v našem případě 5) a šetříme čas.
Při řešení rovnic s parametrem postupujeme úplně stejně jako při řešení rovnic bez parametru s jediným rozdílem: při každé úpravě s parametrem se musíme ujistit, zda je možné ji provést se všemi čísly, které budeme za parametr dosazovat.

Dodatek: I když použití parametrické rovnice podstatně ulehčuje rozvahu v předchozím příkladu, využití tabulkových procesorů skýtá daleko větší možnosti. Ukázka řešení naší situaci je v souboru „stavebni_podnikatel.xls“.

Pedagogická poznámka: Použití podtržené jedničky je nutné studentům podstrčit, některé napadne rovnou použít písmenko. V takém případě jim nebráním, ale s většinou třídy je lepší použít podtrženou jedničku, která je jim bližší a nečiní jim takové problémy při upravování. Příklad řeším s malým zpožděním se studenty na tabuli.

Př. 2: Vyřeš rovnici $x(p+2)+3=p(x+1)$ s neznámou *x* a parametrem *p*.

$x(p+2)+3=p(x+1)$ - roznásobíme závorky, jde se všemi čísly, nic zvláštního.

$xp+2x+3=px+p \quad /-px$ - odečítáme výraz s parametrem, jde se všemi čísly, nic zvláštního.

$2x+3=p$

$2x=p-3$

$x=\frac{p-3}{2}$ $\qquad K=\left\{\frac{p-3}{2}\right\}$

Na konci řešení rovnice s parametrem vždy uvádíme přehled řešitelnosti rovnice v závislosti na hodnotách parametru. Řešení naší rovnice je stejné bez ohledu na hodnotu parametru, přehled bude mít jedinou řádku:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p\in R$	$K=\left\{\frac{p-3}{2}\right\}$

Pedagogická poznámka: Z hlediska řešení parametrických rovnic není příklad zajímavý, protože se řešení nevětví, ale jeho zařazení považuji za vhodné, protože pomáhá překonat strach z dalšího písmenka, které se v rovnici vyskytuje.

Př. 3: Vyřeš rovnici $2xp+p(x+1)=3p-4+2x$ s neznámou *x* a parametrem *p*.

$2xp+p(x+1)=3p-4+2x$

$2xp+xp+p=3p-4+2x$

$3xp-2x=2p-4$

$x(3p-2)=2p-4$

Chceme vydělit rovnici výrazem $3p-2$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou.

$\Rightarrow$ Zjistíme, zda je výraz $3p-2$ někdy roven nule: $3p-2=0 \Rightarrow p=\frac{2}{3}$. Pokud chceme dělit, musíme $p=\frac{2}{3}$ vyloučit, abychom nedělili nulou.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

Když $p\neq\frac{2}{3}$, můžeme vydělit rovnici výrazem $3p-2$, protože se určitě nebude rovnat nule:	Když $p=\frac{2}{3}$ nemůžeme vydělit rovnici výrazem $3p-2$, ale víme, které konkrétní p

$x(3p-2)=2p-4 \quad /:(3p-2)$ $x=\frac{2p-4}{3p-2}$ $\quad K=\left\{\frac{2p-4}{3p-2}\right\}$	nás zajímá a můžeme ho dosadit $\Rightarrow$ $x\left(3\frac{2}{3}-2\right)=2\frac{2}{3}-4$ $x.0=\frac{4}{3}-4$ $0=-\frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ pro $p=\frac{2}{3}$ nemá rovnice řešení $\Rightarrow$ $K=\emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p\neq\frac{2}{3}$	$K=\left\{\frac{2p-4}{3p-2}\right\}$
$p=\frac{2}{3}$	$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: U velké většiny studentů rozhoduje o úspěchu při řešení parametrických rovnic to, zda si udrží přehled nad příkladem a neztratí orientaci v tom, co a proč vlastně počítají. Pro udržení této orientace je přehledný zápis strašně důležitý, a proto se snažím trvat na tom, aby rozvětvení příkladu zapisovali vedle sebe do sloupců, stejně jak to dělám v učebnici (pokud nejsou větve tři, což by znamenalo příliš úzké sloupce).

Pedagogická poznámka: Studenti v naprosté většině považují dosazování hodnoty $p=\frac{2}{3}$ do tvaru rovnice před dělením za zbytečné a automaticky píší pro $p=\frac{2}{3}$ jako výsledek $K=\emptyset$. O omylu je přesvědčí až příklady z další hodiny.

Shrnutí: Rovnice s parametrem řešíme stejně jako rovnice bez parametru, pouze v okamžiku, kdy provádíme operace, které není možné provést se všemi čísly, rozebereme možné hodnoty parametru a případně rozdělíme řešení.